18/03/2019

Πρόβλημα: Θεωρούμε την αναδρομική ακολουθία $(x_n)_{n\geq 0}$, όπου $x_{n+1} = a x_{n-1} + \beta x_n$, $\forall n \geq 1$, $a,\beta \in \mathbb{R}$, $a>0$.
Να βρεθεί ο n-οστός όρος της ακολουθίας x_n.

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & \beta \end{pmatrix}$

Τότε: $A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ a x_{n-1} + \beta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot A \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= A^3 \begin{pmatrix} x_{n-3} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$ Άρα: $\boxed{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}}$

$$P_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ a & \beta - t \end{vmatrix} = t^2 - \beta t - a$$

$\Delta = \beta^2 + 4a > 0$ και άρα το $P_A(t) = t^2 - \beta t - a$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbb{R}$:

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4a}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2+4a}}{2}$$

Θέτουμε $D = \sqrt{\beta^2 + 4a}$

Τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\Rightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας P: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}}$$

• Για την λ_1: $(A - \lambda_1 I_2) X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ a & \beta - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 x + y = 0 \\ a x + (\beta - \lambda_1) y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda_1 x \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\}$$ βάση του $V(\lambda_1)$

• Για την λ_2: $(A-\lambda_2 I_2)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ a & b-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$ βάση του $V(\lambda_2)$

Τότε $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ και $P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}$

Επειδή $\lambda_1 - \lambda_2 = D = \sqrt{b^2+4a}$ θα έχουμε ότι:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\frac{1}{D}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_2 & -1 \end{pmatrix} = \dots\dots$$

$$\dots = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} -\lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ -\lambda_2\lambda_1^{n+1} + \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε: $x_0 = r$ και $x_1 = s$.

Τότε $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow x_n = \dfrac{(\lambda_1^n - \lambda_2^n)s - a(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1})r}{\sqrt{b^2+4a}}$

Για $a=b=1$ και $x_0=0$, $x_1=1$ έχουμε $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=5$, $x_6=8$, ...

και προκύπτει: $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$ Ακολουθία Fibonacci

Τότε: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Ελάχιστο Πολυώνυμο

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$

Ο πίνακας τον οποίο ορίζει το πολυώνυμο $P(t)$ ορίζεται να είναι ο: $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m \in M_n(\mathbb{K})$ και

καλείται ο πολυωνυμικός πίνακας τον οποίο ορίζει το πολυώνυμο $P(t)$

Παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P_A(t) = t^2 - 2t + 3$.

Τότε: $P_A(A) = A^2 - 2A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_A(A) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Άσκηση: Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε:

1) $(P(t) + Q(t))(A) = P(A) + Q(A)$
2) $(P(t) \cdot Q(t))(A) = P(A) \cdot Q(A)$

→ Το πολυώνυμο $P(t)$ μηδενίζει τον πίνακα $A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A) = 0$

Πρόβλημα: Υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $P(t)$: $P(A) = 0$?

Απάντηση: Ναι, διότι έστω το σύνολο πινάκων $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ το οποίο έχει n^2+1 στοιχεία. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = n^2$ έπεται ότι το παραπάνω σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ όχι όλα ταυτόχρονα ίσα με 0 έτσι ώστε
$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$

Υπάρχουν πάντα πολυώνυμα μη-μηδενικά πολυώνυμα τα οποία μηδενίζουν κάθε πίνακα

Θέτουμε $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n^2} t^{n^2} \in \mathbb{K}[t]$, τότε $P(t) \neq 0$ και $P(A) = 0$

→ Έστω $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$, $a_m \neq 0$ και έστω $P(A) = 0$. Τότε:

$$P^*(t) = \frac{a_0}{a_m} + \frac{a_1}{a_m} t + \ldots + \frac{a_{m-1}}{a_m} t^{m-1} + t^m$$

είναι κανονικό πολυώνυμο και $P^*(A) = 0$. Άρα υπάρχουν κανονικά πολυώνυμα τα οποία μηδενίζουν τον A.

<u>Ορισμός</u>: Ένα ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι ένα πολυώνυμο $Q(t)$ το οποίο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) Το $Q(t)$ είναι κανονικό

ii) $Q(A) = 0$

iii) αν $0 \neq P(t) \in \mathbb{K}[t]$ και $P(A) = 0$, τότε: $\deg Q(t) \leq \deg P(t)$

<u>Δείξαμε</u> ότι ελάχιστα πολυώνυμα του A υπάρχουν. Θα δειχθεί ότι αν $Q_1(t), Q_2(t)$ είναι ελάχιστα πολυώνυμα του A, τότε $Q_1(t) = Q_2(t)$

<u>Λήμμα</u> Έστω $Q(t)$ ένα ελάχιστο πολυώνυμο του A και έστω $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ έτσι ώστε $P(A) = 0$. Τότε $Q(t) \mid P(t)$

<u>Απόδειξη</u>: Από την ευκλείδεια διαίρεση του $P(t)$ με το $Q(t)$ έχουμε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $R(t), S(t)$: $P(t) = S(t)Q(t) + R(t)$, όπου είτε $R(t) = 0$ είτε $\deg R(t) < \deg Q(t)$

Τότε: $0 = P(A) = \cancel{S(A)Q(A)} + R(A) \Rightarrow R(A) = 0$

Τότε αν $R(t) \neq 0$ καταλήγουμε σε άτοπο:

$$\deg R(t) < \deg Q(t) \leq \deg R(t)$$

Άρα $R(t) = 0$ και τότε $P(t) = S(t)Q(t) \Rightarrow Q(t) \mid P(t)$

Πόρισμα Αν $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ είναι ελάχιστα πολυώνυμα του A, τότε $Q_1(t) = Q_2(t)$

Απόδειξη Από τον ορισμό και το Λήμμα έπεται ότι
$Q_1(t) \mid Q_2(t)$ και $Q_2(t) \mid Q_1(t)$.
Τότε $Q_1(t) = Q_2(t)$ ως κανονικά πολυώνυμα

Ορισμός Το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι το μοναδικό πολυώνυμο το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες:
i) Το $Q(t)$ είναι κανονικό
ii) $Q(A)=0$
iii) αν $0 \neq P(t) \in \mathbb{K}[t]$ και $P(A)=0$, τότε $\deg Q(t) \leq \deg P(t)$
και θα το συμβολίζουμε με $Q_A(t)$

→ Για κάθε πίνακα A έχουμε δύο πολυώνυμα:
- $P_A(t) = |A - tI_n|$, χαρακτηριστικό
- $Q_A(t)$, ελάχιστο.

Θεώρημα Cayley-Hamilton
$$P_A(A) = 0$$

Απόδειξη ~~Επειδή $P_A(t) = |A - tI_n|$ θα έχουμε:~~
~~$\underbrace{P_A(A)}_{\text{πίνακας}} = |A - AI_n| = |A - A| = |0| = \underbrace{0}_{\text{αριθμός}}$~~ ΛΑΘΟΣ ‼

Η απόδειξη παραλείπεται.
Για $n=2$:
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $P_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+b)t + (ad-bc)$
$\Rightarrow P_A(t) = t^2 - Tr(A) + |A|$

$$P_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+db \\ ac+dc & d^2+cb \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

<u>Πόρισμα</u> $Q_A(t) \mid P_A(t)$

<u>Πρόταση</u>: Τα πολυώνυμα $P_A(t)$, $Q_A(t)$ έχουν τις ίδιες ρίζες

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή από το πόρισμα $Q_A(t) \mid P_A(t) \Rightarrow \exists S(t) \in \mathbb{K}[t]$:
$P_A(t) = Q_A(t) \cdot S(t) \Rightarrow$ κάθε ρίζα του $Q_A(t)$ είναι και ρίζα του $P_A(t)$

Έστω ρ: μια ρίζα του $P_A(t)$ στο $\mathbb{K}[t] \Rightarrow \rho$: ιδιοτιμή του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists Y \neq 0$: $\boxed{AY = \rho Y}$

Έστω ότι $Q_A(t) = b_0 + b_1 t + \dots + t^m$

Τότε θα δειχθεί ότι $Q_A(\rho) = b_0 + b_1\rho + \dots + b_{m-1}\rho^{m-1} + \rho^m = 0$

$AY = \rho Y \Rightarrow A^2 Y = \rho^2 Y$ και παρόμοια $A^k Y = \rho^k Y$, $\forall k \geq 1$

$Q_A(A) = 0 \Rightarrow 0 \cdot Y = Q_A(A) \cdot Y \Rightarrow$

μηδενικός πίνακας

$\Rightarrow b_0 Y + b_1 AY + \dots + b_{m-1}A^{m-1}Y + A^m Y \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = b_0 Y + b_1 \rho Y + b_2 \rho^2 Y + \dots + b_{m-1}\rho^{m-1} Y + \rho^m Y$

$\Rightarrow 0 = (b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + \dots + b_{m-1}\rho^{m-1})Y$

$\overset{Y\neq 0}{\Rightarrow} b_0 + b_1\rho + \dots + \rho^m = 0$

$\Rightarrow Q_A(\rho) = 0 \Rightarrow \rho$: ρίζα του $Q_A(t)$

Άρα οι ρίζες των $Q_A(t)$, $P_A(t)$ στο $\mathbb{K}$ είναι ίδιες.